MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam**.
Op vel 1: **studentnummer**, **naam**, **adres**, **postkode**, **woonplaats** en **studierichting**.
De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

cijfer = (Σ punten)/3 + 1

IN ALLE OPGAVEN KAN VAN DE GEGEVENS IN DE TABEL GEBRUIK GEMAAKT WORDEN

G	= $6{,}672.10^{-11}$ N kg^2/m^2
m_{aarde}	= $5{,}976.10^{24}$ kg
straal aarde r_a	= $6{,}378.10^{6}$ m
g	= 9,810 m/s^2
1 hPa	= $1{,}0.10^{5}$ N/m^2

Opgave 1. NASA verspeelt meetbal

Een shuttle met massa m_S draait in een cirkelbaan op een hoogte h = 500km van het aardoppervlak. Vanuit de shuttle wordt een meetbal met massa m_b aan een kabel met een lengte l = 20km en diameter d = 0,2 cm losgelaten langs de verbindingsas aarde-shuttle.

NASA verspeelt meetbal van 700 miljoen in experiment met shuttle

Van onze wetenschapsredactie
AMSTERDAM

De Amerikaanse ruimtevaartorganisatie NASA heeft maandagmorgen in alle vroegte (Nederlandse tijd) een meetbal van zevenhonderd miljoen gulden verspeeld.

Het instrument, bedoeld om als experiment stroom in de ruimte op te wekken, werd getrokken door de space shuttle Columbia aan een bijna twintig kilometer lange kabel. Deze brak af bij de haspel in het laadruim van de shuttle. De oorzaak van het mankement is onbekend.

Zondagavond was, na een dag vertraging vanwege een computerstoring aan boord van de shuttle, met aan het eind de vijfhonderd kilo zware meetbal, bijna geheel gevierd.

De bal had een dag in die positie moeten blijven, onder meer voor fysische metingen in de aardse ionosfeer en om te bewijzen dat stroom op deze manier kan worden opgewekt.

Op het moment van afbreken, stond er een spanningsverschil van drieduizend volt tussen shuttle en meetbal.

Zo'n spanningsverschil ontstaat wanneer een geleidend voorwerp – de anderhalve meter dikke bal met zijn meetinstrumenten – door het aardmagnetisch veld wordt getrokken.

De tweetiende centimeter dikke van zat koperdraad voor het geleiden van de opgewekte elektriciteit. Na het afknappen, verwijderden kabel en bal zich met hoge snelheid van de space shuttle.

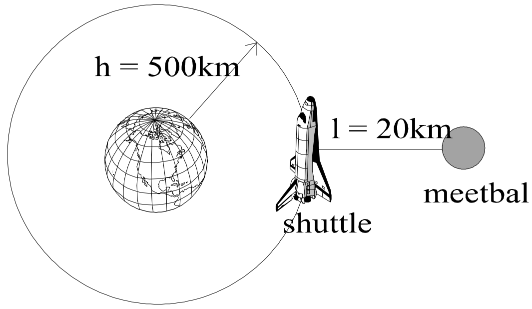
Het meetinstrument (en de kabel) draait in een eliptische baan om de aarde, ver boven de baan van de shuttle. De bal vormt geen gevaar voor de Columbia. Een NASA-woordvoerder verwacht dat de meetbal almaar in een lagere omloopbaan terecht zal komen en uiteindelijk in de aardse dampkring zal verbranden.

In 1992 moest eenzelfde experiment met de bal, die van Italiaanse makelij is, vroegtijdig worden opgegeven. De lier haperde toen de kabel enkele honderden meters was

Artikel in de Volkskrant van 27 februari j.l.

2 a. Bereken de tijd T waarin de shuttle precies één keer om de aarde draait. Ga er daarbij van uit dat de massa van de meetbal verwaarloosbaar klein is ten opzichte van die van de shuttle.

De meetbal draait met dezelfde hoeksnelheid om de aarde als de shuttle.



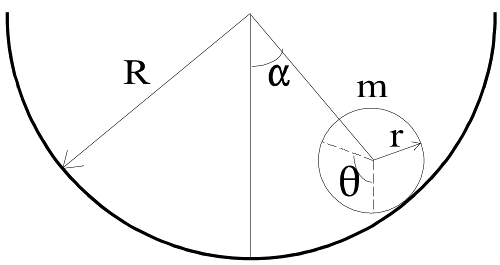
3 b. Bereken de spankracht F_S in de kabel.

De massa van de meetbal is 500 kg.

2 c. Laat zien dat, als de maximale spanning die de kabel kan verdragen 100 hPa is, de kabel zal breken (hetgeen dus ook gebeurd is).

Opgave 2. Rollende cilinder

In een goot met straal R ligt een cilinder met straal r, massa m en traagheidsmoment I ten opzichte van de lengteas. De cilinder wordt uit het evenwicht gebracht en daarna losgelaten, waarna deze een periodieke beweging gaat uitvoeren.



1 a. Bereken het verband tussen de hoek α waarover het middelpunt van de cilinder moet worden verplaatst als de cilinder ten opzichte van de eigen lengteas over een hoek θ zonder te slippen wordt gedraaid .

1 b. Bereken de potentiële energie van de cilinder als functie van α.

Ga er nog steeds van uit dat de cilinder rolt zonder te slippen.

3 c. Bereken de kinetische energie van de cilinder als functie van de hoeksnelheid $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$. In de gevraagde uitdrukking komen θ en $\frac{d\theta}{dt}$ dus niet voor.

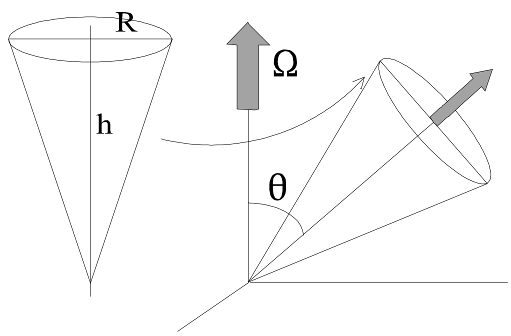
3 d. Stel aan de hand van de Lagrangiaan de bewegingsvergelijking van de cilinder op.

Neem aan dat de beginhoek waarbij de cilinder wordt losgelaten zo klein is dat men bij goede benadering mag stellen dat $\sin(\alpha) = \alpha$.
Neem aan dat de cilinder **homogeen** is en dat de straal van de cilinder $r = \frac{1}{2}R$.

2 e. Bereken de periode T van de beweging uitgedrukt in R en de versnelling van de zwaartekracht g.

Opgave 3. Precessie van een tol

Een kegelvormige tol (een zogenaamde priktol) staat op de punt. De massa van de homogene tol is m, de hoogte h en de straal van het cirkelvormige grondvlak R.
Het volume van een kegel is $V = \frac{\pi}{3} h R^2$



3 a. Laat zien dat het traagheidsmoment van de tol ten opzichte van de symmetrie-as gegeven wordt door:

$$I = \frac{3}{10} m R^2$$

3 b. Bereken de afstand z van het zwaartepunt van de tol ten opzichte van de top, uitgedrukt in h.

Stel dat de tol met een hoeksnelheid ω om de symmetrie-as draait, terwijl die as een hoek θ maakt met de vertikaal. De as van de tol voert dan een precessie-beweging uit met een hoeksnelheid Ω.

1 c. Bereken de grootte van het krachtmoment dat de zwaartekracht op de tol uitoefent ten opzichte van de punt van de tol, uitgedrukt in θ.

3 d. Bereken de hoeksnelheid Ω van de precessie-beweging, uitgedrukt in h, R en ω.

UITWERKING tentamen mechanica 18 03 96

1a. $M\omega^2 R = G\frac{m_a M}{R^2}$ zodat $\omega = \sqrt{G\frac{m_a}{R^3}} = \sqrt{\frac{g}{r_a}\left(\frac{r_a}{R}\right)^3} = \sqrt{\frac{9,81}{6,4\,.\,10^6}\left(\frac{6,4}{6,9}\right)^3} = 1,1\,.\,10^{-3}$ rad/s

en $T = \frac{2\pi}{\omega} = 5,7\,.\,10^3$s = 1,6 uur.

b. $F_s = m\omega^2(R+l) - G\frac{m_a m}{(R+l)^2} = \frac{m\omega^2}{(R+l)^2}[3R^2 l + 3Rl^2 + l^3] \approx 3m\omega^2 l = 37$N

c. druk = kracht/oppervlak = $\frac{37}{\frac{\pi}{4}d^2} = 1,2\,.\,10^7$ N/m^2 = 120hPa > maximale druk

2a. $r\theta + r\alpha = R\alpha \rightarrow \theta = \frac{R-r}{r}\alpha$

b. $V = -mg(R-r)\cos\alpha$

c. $T = \frac{1}{2}m(R-r)^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)(R-r)^2\dot{\alpha}^2$

d. L = T - V zodat uit $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = 0$ volgt:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{(R-r)\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}\sin\alpha = 0$$

e. Homogene cilinder: $I = \frac{1}{2}mr^2$ zodat de vergelijking wordt: $\ddot{\alpha} + \frac{2g}{3(R-r)}\alpha = 0$

Dit is de vergelijking van een harmonische trilling met periode: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-\frac{1}{2}R)}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{4g}}$

3a. Verdeel de tol in schijven loodrecht op de as met een dikte dy een straal r en op een afstand y van de top. Met de dichtheid $\rho = \frac{m}{\frac{\pi}{3}hR^2} = \frac{3m}{\pi hR^2}$ volgt dan voor het traagheidsmoment:

$$I = \int dI = \int\frac{1}{2}dm\,r^2 = \frac{1}{2}\frac{3m}{\pi hR^2}\int\pi r^2 dy\,r^2 = \frac{3m}{2hR^2}\int_0^h\left(\frac{R}{h}\right)^4 y^4 dy = \frac{3}{10}mR^2$$

b. Ligt het zwaartepunt op een afstand z van de top, dan geldt:

$$m\,.\,z = \int y\,dm = \frac{3m}{\pi hR^2}\int\pi r^2 dy\,y = \frac{3m}{hR^2}\int_0^h\left(\frac{R}{h}\right)^2 y^3 dy = \frac{3}{4}mh \text{ zodat } z = \frac{3}{4}h$$

c. $N = mgz\sin\theta = \frac{3}{4}mgh\sin\theta$

d. Het krachtmoment = verandering van het impulsmoment. Aangezien het krachtmoment een horizontale vector is, is de verandering van het impulsmoment ook een horizontale vector, namelijk:

$I\omega\,.\,\sin\theta\,.\,\Omega$ met de resultaten uit a. en c. volgt dan: $\Omega = \frac{\frac{3}{4}mgh}{\frac{3}{10}mR^2\omega} = \frac{5}{2}\frac{gh}{R^2\omega}$